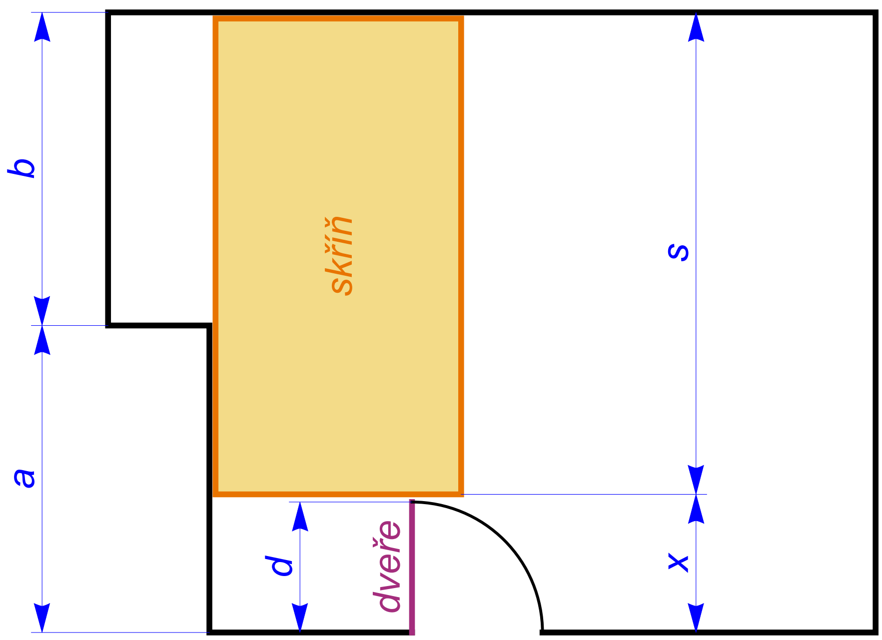
Rozdělení pravděpodobnosti spojitých náhodných veličin

Zadání

V obdélníkovém pokoji je výklenek, který je zakryt velkou skříní. Naproti skříni jsou dveře, které se otevírají dovnitř. Rozměry pokoje, skříně a dveří udávají délky a, b, s, d, x — viz. obrázek 1.



Obrázek 1: půdorys pokoje se skříní

Délkám a, b, s, d, x odpovídají spojité náhodné veličiny A, B, S, D, X. Rozdělení pravděpodobnosti náhodných veličin A, B, S, D jsou zadána prostřednictvím hustot pravděpodobnosti f_A, f_B, f_S, f_D.

Po určité době od stanovení rozdělení pravděpodobnosti náhodných veličin A, B, S vzniklo podezření, že někdo manipuloval se skříní (chtěl si něco vzít z výklenku). Aby bylo možno toto podezření prověřit, byla změřena délka x. Měření bylo provedeno několikrát nezávisle jedním přístrojem za stálých podmínek, které zaručily stejnou přesnost přístroje v průběhu celého měření. Chyby měření mají tedy náhodný charakter. Odpovídá jim spojitá náhodná veličina $\mathcal{E}_X$. Předpokládáme, že rozdělení pravděpodobnosti měřických chyb $\mathcal{E}_X$ je známo.

Náhodné veličiny $\mathcal{E}_X$, X, A, B, S mají normální rozdělení pravděpodobnosti, náhodná veličina D má rovnoměrné rozdělení s konstantní hustotou pravděpodobnosti

$$f_D(x) := \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{pro} \quad x \in (d - 2.5\text{mm},\, d + 2.5\text{mm})\ , \\ 0 & \text{pro} \quad |x - d| > 2.5\text{mm}\ . \end{cases} \tag{1}$$

Náhodná veličina U, $U \in \{\mathcal{E}_X, X, A, B, S\}$, má normální rozdělení pravděpodobnosti $\mathcal{N}(\mu_U, \sigma_U^2)$. Požadujeme, aby jeho parametr σ_U byl roven směrodatné odchylce binomického rozdělení pravděpodobnosti $\mathrm{Bi}(n_U,\, q_U)$ z minulé úlohy. Rovněž požadujeme, aby parametr μ_U odpovídal střední hodnotě diskrétního rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny U z minulé úlohy, tzn. $\mu_U = E(U) =: \bar{u}$. Symbol u zastupuje některou z veličin ε_X, x, a, b, s, tzn. $u \in \{\varepsilon_X, x, a, b, s\}$. Dále předpokládáme, že $\bar{\varepsilon}_X := 0$.

Součet spojitých náhodných veličin A, B je opět spojitá náhodná veličina; označíme ji C. Její hustotu pravděpodobnosti f_C lze určit podobně jako u součtu diskrétních náhodných veličin podle vztahu

$$f_C(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_A(a)\, f_B(x - a)\, da \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}\ . \tag{2}$$

Pro normálně rozdělené náhodné veličiny $A \sim \mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A^2)$, $B \sim \mathcal{N}(\mu_B, \sigma_B^2)$ platí, že rozdělení pravděpodobnosti jejich součtu $A + B =: C$ je opět normální.

$$C \sim \mathcal{N}(\mu_A + \mu_B,\ \sigma_A^2 + \sigma_B^2)$$

To lze snadno dokázat pomocí vztahu (2).

Podobně se určí i pravděpodobnost rozdílu spojitých náhodných veličin.

Úkoly

1. Určete střední hodnoty normálně rozdělených náhodných veličin A, B, S tak, aby byly stejné jako střední hodnoty diskrétních náhodných veličin A, B, S z minulé úlohy. Určete směrodatné odchylky normálně rozdělených náhodných veličin A, B, S tak, aby byly stejné jako směrodatné odchylky binomických rozdělení $\mathrm{Bi}(n_U,\, q_U)$ pro $U \in \{A, B, S\}$, které jste si zvolili v minulé úloze. Položte $d := 900$ mm.

2. Určete rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny $A + B - S$ a nakreslete jeho hustotu pravděpodobnosti.

3. Jaká je pravděpodobnost, že půjdou otevřít dveře dokořán, aniž by narazily do skříně?

4. Zvolte $x^* \doteq 900$ mm stejně jako v minulé úloze. Určete rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny $X = x^* + \mathcal{E}_X$ tak, aby její variance byla stejná jako variance binomického rozdělení $\mathrm{Bi}(n_X,\, q_X)$ z minulé úlohy, tzn.

   $$X \sim \mathcal{N}(x^*, \sigma_X^2) \ .$$

   Vygenerujte několik měření z rozdělení $\mathcal{N}(x^*, \sigma_X^2)$ a zapomeňte hodnotu x^*. Určete rozdělení pravděpodobnosti **parametru polohy** náhodné veličiny X pomocí Bayesovy věty. Apriorní rozdělení předpokládejte rovnoměrné na množině reálných čísel, tzv. **neinformativní rozdělení pravděpodobnosti**. Nakreslete hustotu pravděpodobnosti **parametru polohy** náhodné veličiny X.

5. Jaká je pravděpodobnost, že skříň byla posunuta?

4. prosince 2017

Lubomír Soukup

soukup@utia.cas.cz