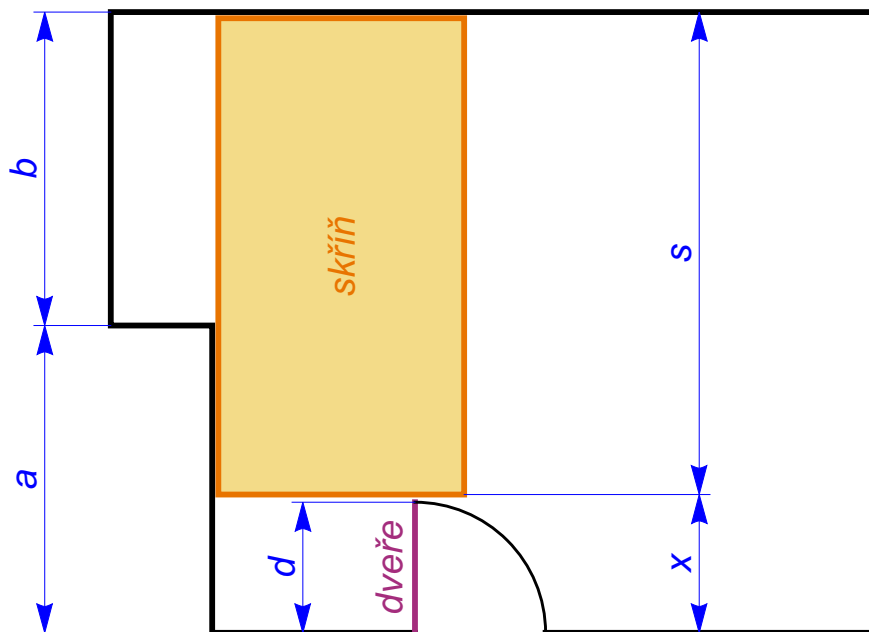


Rozdělení pravděpodobnosti spojitých náhodných veličin

Zadání

V obdélníkovém pokoji je výklenek, který je zakryt velkou skříní. Naproti skříní jsou dveře, které se otevírají dovnitř. Rozměry pokoje, skříně a dveří udávají délky a , b , s , d , x — viz. obrázek 1.



Obrázek 1: půdorys pokoje se skříní

Délkám a , b , s , d , x odpovídají spojité náhodné veličiny A , B , S , D , X . Rozdělení pravděpodobnosti náhodných veličin A , B , S , D jsou zadána prostřednictvím hustot pravděpodobnosti f_A , f_B , f_S , f_D .

Po určité době od stanovení rozdělení pravděpodobnosti náhodných veličin A , B , S vzniklo podezření, že někdo manipuloval se skříní (chtěl si něco vzít z výklenku). Aby bylo možno toto podezření prověřit, byla změřena délka x . Měření bylo provedeno několikrát

nezávisle jedním přístrojem za stálých podmínek, které zaručily stejnou přesnost přístroje v průběhu celého měření. Chyby měření mají tedy náhodný charakter. Odpovídá jim spojitá náhodná veličina \mathcal{E}_X . Předpokládáme, že rozdělení pravděpodobnosti měřických chyb \mathcal{E}_X je známo.

Náhodné veličiny $\mathcal{E}_X, X, A, B, S$ mají normální rozdělení pravděpodobnosti, náhodná veličina D má rovnoměrné rozdělení s konstantní hustotou pravděpodobnosti

$$f_D(x) := \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{pro } x \in (d - 2.5\text{mm}, d + 2.5\text{mm}), \\ 0 & \text{pro } |x - d| > 2.5\text{mm}. \end{cases}$$

Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny $U, U \in \{\mathcal{E}_X, X, A, B, S\}$, je normální $\mathcal{N}(\mu_U, \sigma_U^2)$ s parametrem σ_U odpovídajícím směrodatné odchylce binomického rozdělení pravděpodobnosti $\text{Bi}(n_U, q_U)$ z minulé úlohy. Rovněž parametr μ_U odpovídá diskrétnímu rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny U z minulé úlohy. Je roven její střední hodnotě, tzn. $\mu_U = E(U) =: \bar{u}$. Symbol u zastupuje některou z veličin $\varepsilon_X, x, a, b, s$, tzn. $u \in \{\varepsilon_X, x, a, b, s\}$. Dále předpokládáme, že $\bar{\varepsilon}_X := 0$.

Součet spojitých náhodných veličin A, B je opět náhodná veličina; označíme ji C . Její hustotu pravděpodobnosti f_C lze určit podle vztahu

$$f_C(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_A(a) f_B(x - a) da \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Podobně se určí i pravděpodobnost rozdílu spojitých náhodných veličin.

Úkoly

1. Určete střední hodnoty normálně rozdělených náhodných veličin A, B, S tak, aby byly stejné jako střední hodnoty diskrétních náhodných veličin A, B, S z minulé úlohy. Určete směrodatné odchylky normálně rozdělených náhodných veličin A, B, S tak, aby byly stejné jako směrodatné odchylky binomických rozdělení $\text{Bi}(n_U, q_U)$ pro $U \in \{A, B, S\}$, které jste si zvolili v minulé úloze. Položte $d := 900$ mm.
2. Určete rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny $A + B - S$ a nakreslete jeho hustotu pravděpodobnosti.
3. Jaká je pravděpodobnost, že půjdou otevřít dveře dokořán, aniž by narazily do skříně?
4. Zvolte $x^* \doteq 900$ mm stejně jako v minulé úloze. Určete rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny $X = x^* + \mathcal{E}_X$ tak, aby její variance byla stejná jako variance binomického rozdělení $\text{Bi}(n_X, q_X)$ z minulé úlohy, tzn.

$$X \sim \mathcal{N}(x^*, \sigma_X^2).$$

Vygenerujte několik měření z rozdělení $\mathcal{N}(x^*, \sigma_X^2)$ a zapomeňte hodnotu x^* . Určete rozdělení pravděpodobnosti **parametru polohy** náhodné veličiny X pomocí Bayesovy věty. Apriorní rozdělení předpokládejte rovnoměrné na množině reálných

čísel, tzv. **neinformativní rozdělení pravděpodobnosti**. Nakreslete hustotu pravděpodobnosti **parametru polohy** náhodné veličiny X .

5. Jaká je pravděpodobnost, že skříň byla posunuta?

4. prosince 2017

Lubomír Soukup

soukup@utia.cas.cz